

Question liée au Théorème de Gauss

(Rappel: tout nombre entier a une factorisation unique sous forme du produit de nombres premiers)

Comment l'obtenir ?! "Trial and error"

- 1) fait une liste de nombres premiers allant de 2 à $\sqrt{n}$
- 2) on essaye de diviser par chaque premier tant que c'est possible. Si ce ne l'est pas (ou plus), on passe au suivant.

Exemple: $3724 = 2 \times 2 \times 931$

$$931 = 7 \times 133 = 7 \times 7 \times \underline{19}$$

~~2~~, ~~3~~, ~~5~~, ~~7~~, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

$$3724 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 19$$

Définitions:

Plus Grand Commun Diviseur de deux nombres A et $B \in \mathbb{N}$

est noté $\text{PGCD}(A, B)$. On suppose $A \geq B$.

Si $\text{PGCD}(A, B) = 1$, on dit dit que A et B sont "PREMIERS" entre eux.

S: $\text{PGCD}(A, B) = 1$, on dit dit que A et B sont "PREMIERS ENTRE EUX".

⚠ A et B premiers entre eux ne signifie pas qu'ils sont premiers!

Exemple: $\text{PGCD}(4, 9) = 1$ mais ni 4 ni 9 ne sont premiers!

Comment le calculer?

Méthode 1: on factorise A et B en produit de facteurs premiers, et le PGCD est le produit de tous les facteurs communs.

Ex: $\text{PGCD}(42, 30)$

$$\begin{aligned} 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

⚠ Prendre 1x chaque paire commune!

$$\text{PGCD}(42, 30) = 2 \times 3 = 6$$

$\text{PGCD}(27, 9)$

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \times 3 \\ 27 &= 3 \times 3 \times 3 \end{aligned}$$

$$= 3 \times 3 = 9$$

Méthode 2: Euclide

Exemple $\text{PGCD}(42, 30)$ ^{Plus grand}

$$\begin{array}{r} 42 \div 30 = 1 \text{ r } 12 \\ 30 \div 12 = 2 \text{ r } 6 \\ 12 \div 6 = 2 \text{ r } 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 30 \\ \hline 12 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 12 \\ \hline 6 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Stop

TANT QU'É
 $r \neq 0$

$$\text{PGCD}(42, 30) = r_{\text{étape-1}} = 6$$

Exemple 2: $\text{PGCD}(770, 168)$

$$\begin{array}{r|l} 770 & 168 \\ \hline 98 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 168 & 98 \\ \hline 70 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 98 & 70 \\ \hline 28 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 70 & 28 \\ \hline 14 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 14 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

STOP

$$\text{PGCD}(770, 168) = 14$$